

## Capitolo 2

### Elementi di ottica non lineare quadratica. Generazione di seconda armonica.

#### 2.1. Non linearità quadratica

Le equazioni di Maxwell in mezzi dielettrici non magnetici si scrivono

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \quad (2.1b)$$

nelle quali  $\mathbf{p}(\mathbf{r},t)$  è la polarizzazione del mezzo, cioè il momento di dipolo elettrico per unità di volume.

La polarizzazione è la risposta del materiale alla sollecitazione del campo, e il legame fra questa e il campo elettromagnetico è descritto dalle equazioni costitutive del mezzo, differenti da caso a caso. La polarizzazione influenza a sua volta le caratteristiche del campo che si propaga nel materiale, come le (2.1) mostrano.

In un mezzo con risposta istantanea e puntuale, cioè non dispersiva nel tempo né nello spazio, la relazione costitutiva che fornisce la polarizzazione in dipendenza dal campo elettrico è del tipo:

$$p_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij}^{(1)} e_j + \varepsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} e_j e_k + \varepsilon_0 \sum_{j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)} e_j e_k e_l + \dots \quad (2.2)$$

in cui si esprime la  $i$ -ma componente di  $\mathbf{p}$  in funzione delle componenti  $e_j$  ( $j=x,y,z$ ) di  $\mathbf{E}$  lungo le direzioni di riferimento.

La prima sommatoria della serie è la risposta lineare del mezzo. La diminuzione della velocità di fase delle onde monocromatiche nei mezzi materiali è dovuta a questo contributo, così come la birifrangenza dei mezzi anisotropi.

I fenomeni legati alla presenza del secondo termine sono oggetto dell'ottica non lineare quadratica; quelli legati al terzo riguardano l'ottica non lineare cubica, e di essi ci si disinteressa nel seguito.

Affinché i contributi di ordine superiore al primo risultino effettivamente significativi, occorre che il campo elettrico  $\mathbf{e}(t)$  assuma valori confrontabili con i campi della struttura microscopica del mezzo, caratteristici delle interazioni intermolecolari, interatomiche, interioniche o subatomiche. Da un punto di vista macroscopico ciò corrisponde al basso modulo degli elementi di  $\chi^{(2)}$ ,  $\chi^{(3)}$ , e successivi rispetto agli elementi di  $\chi^{(1)}$ .

Le generazioni di campi oscillanti alla frequenza somma  $\omega_1 + \omega_2$  e differenza  $\omega_1 - \omega_2$  delle frequenze  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  di due onde monocromatiche nel materiale, sono tipici fenomeni di non linearità quadratica. Sono casi particolari dei precedenti la duplicazione di

frequenza, o generazione di seconda armonica (SHG), e la rettificazione ottica. La duplicazione di frequenza è la generazione di un campo oscillante a  $2\omega$  ( $=\omega+\omega$ ) in presenza di un campo forzante a pulsazione  $\omega$ ; la rettificazione ottica è il manifestarsi di una polarizzazione statica nelle stesse condizioni.

Si propongono alcuni elementi di teoria utili nell'indagine e nella discussione sui fenomeni di duplicazione di frequenza.

Per la formalizzazione dello studio delle non linearità, si può evidenziare in  $\mathbf{p}(\mathbf{r},t)$  il contributo non lineare e la restante parte lineare:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_L + \mathbf{p}_{NL} \quad (2.3)$$

dove

$$\mathbf{p}_{NL} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\chi}}^{(2)} : \mathbf{e}(t)\mathbf{e}(t). \quad (2.4)$$

La (2.4) è una forma abbreviata per esprimere ciascuna delle componenti del termine non lineare:

$$(\mathbf{p}_{NL})_i = \varepsilon_0 \sum_{j,k=x,y,z} \chi_{ijk}^{(2)} e_j e_k. \quad (2.5)$$

I 27 elementi del tensore  $\underline{\underline{\chi}}^{(2)}$  non sono distinti, essendo certamente  $\chi_{ijk} = \chi_{ikj}$ , per l'indistinguibilità fisica dei prodotti  $e_j e_k = e_k e_j$ ; è d'uso la convenzione di Voigt per la contrazione degli indici, la quale richiede di indicare  $\chi_{ijk}$  con  $\chi_{im}$ , secondo la regola riassunta nella seguente tabella.

(j,k)	(1,1)	(2,2)	(3,3)	(2,3)	(1,3)	(1,2)
(m)	1	2	3	4	5	6

La (2.5) mostra che condizione necessaria per il manifestarsi delle non linearità quadratiche è l'assenza di simmetria centrale del cristallo considerato. Quest'ultima imporrebbe infatti la condizione fisica:

$$\mathbf{e}(t) \rightarrow -\mathbf{e}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}(t) \rightarrow -\mathbf{p}(t) \quad (2.6)$$

ma naturalmente ciò sarebbe incompatibile con la (2.5) senza l'annullarsi di  $\underline{\underline{\chi}}^{(2)}$ . Le non linearità quadratiche si manifestano soltanto in mezzi non centrosimmetrici.

Se  $\mathbf{e}(t)$  è una sollecitazione cisoidale di pulsazione  $\omega$ , si può esprimere in notazione fasoriale:

$$\mathbf{e}(t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\omega)e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\omega)e^{j\omega t} + c.c., \quad (2.7)$$

e dunque per la (2.4), con  $\underline{\chi}^{(2)}$  certamente ad elementi reali, si ha

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{NL} &= \varepsilon_0 \underline{\chi}^{(2)} : \left[ \frac{1}{2} \mathbf{E}(\omega) e^{j\omega t} + c.c. \right] \left[ \frac{1}{2} \mathbf{E}(\omega) e^{j\omega t} + c.c. \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \text{Re}[\varepsilon_0 \underline{\chi}^{(2)} : \mathbf{E}(\omega) \mathbf{E}^*(\omega)] + \frac{1}{2} \text{Re}[\varepsilon_0 \underline{\chi}^{(2)} : \mathbf{E}(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{j2\omega t}] : \\
 &= \text{Re}[\mathbf{P}^{(0)}] + \text{Re}[\mathbf{P}^{(2\omega)} e^{j2\omega t}]
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

nelle quali si evidenzia la presenza di un termine costante e di uno a pulsazione  $2\omega$ , oltre che l'introduzione della notazione fasoriale pure per  $\mathbf{p}_{NL}$ ; il fasore della polarizzazione a pulsazione  $2\omega$  è legato al campo a frequenza angolare  $\omega$  dalla relazione:

$$\mathbf{P}^{(2\omega)} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \underline{\chi}^{(2)} : \mathbf{E}(\omega) \mathbf{E}(\omega) \equiv \varepsilon_0 \underline{\mathbf{d}}^{(2)} : \mathbf{E}(\omega) \mathbf{E}(\omega), \tag{2.9}$$

nella quale si è cambiata notazione, aderendo all'uso comune di indicare con  $\mathbf{d}$  i coefficienti di non linearità nel dominio della frequenza. Si può estendere la (2.9) al caso più generale di risposta non istantanea nel tempo, divenendo il tensore  $\mathbf{d}$  ad elementi complessi.

La (2.5) mostra che il campo a fondamentale può sollecitare componenti di polarizzazione non lineare in direzioni non coincidenti con quella di polarizzazione del campo stesso; un'analogia meccanica molto semplice può forse aiutare nella visualizzazione di questa interazione, e più in generale del significato fisico delle (2.5). Un pendolo semplice, vincolato rigidamente al suo punto di sospensione, oscilla sotto l'azione di una forza sinusoidale agente in direzione orizzontale. Per ampiezze delle oscillazioni sufficientemente grandi, il pendolo acquista pure componenti non trascurabili di moto in direzione verticale, aumentando e diminuendo la sua quota. Tale moto verticale è descrivibile, in prima approssimazione, come somma di un contributo costante (la quota media del pendolo aumenta) e di un contributo sinusoidale a frequenza doppia di quella del moto orizzontale; infatti, per ogni oscillazione orizzontale del pendolo, esso raggiunge per due volte la quota massima e per due volte attraversa il punto di quota minima. La presenza dei vincoli sul moto e delle corrispondenti forze di richiamo dipendenti in maniera "non lineare" dallo spostamento sono l'origine fisica del fenomeno di duplicazione di frequenza. Basta immaginare di sostituire al pendolo una carica del mezzo per comprendere come il moto di questa sotto l'azione di un campo elettrico polarizzato "orizzontalmente" possa originare, per le sue oscillazioni verticali, un campo elettrico a frequenza doppia polarizzato verticalmente.

## 2.2. Onde piane e duplicazione di frequenza in mezzi non lineari quadratici. Metodo perturbativo.

In presenza di termini di polarizzazione non lineare le (2.1) non ammettono soluzioni monocromatiche alla generica pulsazione  $\omega$ . Possono però cercarsi, esplicitata

con (2.2) e (2.4) la polarizzazione, soluzioni periodiche di periodo  $T=2\pi/\omega$ , esprimibili dunque in serie di Fourier di  $\omega$ .

La ridotta entità dei contributi non lineari rispetto alla risposta lineare suggerisce un approccio perturbativo per determinare una prima approssimazione della soluzione: il campo nel mezzo deve pensarsi ottenuto dal campo in assenza della polarizzazione non lineare, con l'aggiunta di termini perturbativi.

Ponendo  $\mathbf{p}_{NL}(t)=0$  si determina il contributo d'ordine zero della soluzione, monocromatico a pulsazione  $\omega$ . Dalla conoscenza della soluzione imperturbata si ricavano i termini della polarizzazione non lineare, che rientrano come termini forzanti nelle equazioni del campo, rendendo possibile la valutazione dei termini correttivi al primo ordine. La polarizzazione non lineare riveste dunque il ruolo di sorgente del campo a frequenza doppia.

Per il campo a pulsazione  $\omega$  (fondamentale, pedice f), si hanno le equazioni

$$\nabla \times \mathbf{E}_f = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_f \quad (2.10a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_f = j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_f + j\omega\varepsilon_0\chi(\omega)\mathbf{E}_f = j\omega\varepsilon_f\mathbf{E}_f \quad (2.10b)$$

dove si evidenzia il solo contributo lineare alla polarizzazione.

Si consideri per il campo a fondamentale la soluzione d'onda piana propagantesi lungo y e polarizzata linearmente lungo x:

$$\mathbf{E}_f = \hat{\mathbf{u}}_x A_{f,x} e^{-jk_f y} \quad (2.11)$$

con

$$k_f = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_f}. \quad (2.12)$$

Occorre ora aggiungere i termini della polarizzazione non lineare dati dalla (2.8), cioè il termine perturbativo, nelle equazioni del campo. La polarizzazione non lineare forzante ha un termine costante ed uno a pulsazione  $2\omega$ ; il termine correttivo da aggiungere alla (2.11), campo imperturbato, avrà allora un contributo costante ed uno a  $2\omega$ , la seconda armonica. Per la valutazione di questo secondo contributo valgono

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j2\omega\mu_0\mathbf{H}_s \quad (2.13a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j2\omega\varepsilon_s\mathbf{E}_s + j2\omega\mathbf{P}^{(2\omega)} \quad (2.13b)$$

e sostituendo la (2.9) con il campo sollecitante  $\mathbf{E}_f$ :

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j2\omega\mu_0\mathbf{H}_s \quad (2.14a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j2\omega\varepsilon_s\mathbf{E}_s + j2\omega\varepsilon_0\mathbf{d} : \mathbf{E}_f \mathbf{E}_f \quad (2.14b)$$

che portano per il campo elettrico a:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s + (2\omega)^2 \varepsilon_s \mu_0 \mathbf{E}_s = -4\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\underline{\mathbf{d}}}: \mathbf{E}_f \mathbf{E}_f. \quad (2.15)$$

Rintracciato il termine correttivo del campo potrà reiterarsi nuovamente il processo, per la valutazione delle correzioni di ordine superiore, individuando, in questo processo, sempre ulteriori termini dello sviluppo in serie di Fourier della soluzione esatta.

Occorre evidenziare che l'espressione trovata del campo a fondamentale ha ampiezza costante, trattandosi del termine imperturbato; in realtà ciò che si verifica è il trasferimento di energia nel campo a  $2\omega$ , a spese dell'energia del campo a frequenza  $\omega$ , che andrà "svuotandosi" durante la propagazione. La diminuzione del campo a fondamentale è espressa nei contributi perturbativi di ordine superiore; si ammette l'ipotesi semplificativa di fenomeni a basso rendimento di conversione, trascurando lo svuotamento dell'onda genitrice.

La (2.15) consente di ricavare l'andamento del campo a  $2\omega$ .

Per le (2.9) e (2.11) la (2.15) si scrive

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s + (2\omega)^2 \varepsilon_s \mu_0 \mathbf{E}_s = -4\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 (d_{11} \hat{\mathbf{u}}_x + d_{21} \hat{\mathbf{u}}_y + d_{31} \hat{\mathbf{u}}_z) A_{f,x}^2 e^{-j2k_f y} \quad (2.16)$$

e per ciascuna delle componenti lungo gli assi si ha l'equazione scalare

$$\nabla^2 E_s + (2\omega)^2 \varepsilon_s \mu_0 E_s = -4\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 d A_{f,x}^2 e^{-j2k_f y} \quad (2.17)$$

dove con  $d$  si indica il coefficiente  $d_{i1}$  opportuno.

Si ricerca una soluzione d'onda piana con ampiezza variabile nella direzione di propagazione:

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{B}_s(y) e^{-jk_s y} \quad (2.18)$$

Sostituendo questa nella (2.17) e considerando l'approssimazione

$$\left| \frac{d^2 B_s}{dy^2} \right| \ll \left| -j2k_s \frac{dB_s}{dy} \right|, \quad (2.19)$$

valida per la lentezza delle variazioni dell'ampiezza rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda$ , si giunge a determinare l'equazione che governa l'evoluzione dell'ampiezza del campo a seconda armonica nella direzione di propagazione:

$$\frac{dB_s}{dy} = \frac{2\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{jk_s} d A_{f,x}^2 e^{j(k_s - 2k_f)y} \quad (2.20)$$

Se l'ampiezza  $|\mathbf{B}_s(y)|$  del campo generato è nulla in  $y=0$ , ammettendo l'ipotesi di ampiezza del campo a fondamentale costante lungo la direzione di propagazione per l'ipotesi di svuotamento trascurabile, in  $y=L$  risulta, integrando la (2.20):

$$B_s(L) = -j \frac{k_0}{n_s} d A_{f,x}^2 L \frac{\sin(\Delta k L / 2)}{(\Delta k L / 2)} e^{j(\frac{\Delta k L}{2})} \quad (2.21)$$

nella quale  $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ ,  $n_s = \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_0}}$ , e si è posta la definizione di fattore di asincronia di fase (*phase mismatch factor*)

$$\Delta k = k_s - 2k_f. \quad (2.22)$$

L'intensità d'energia trasportata da un'onda piana è

$$I = \frac{1}{2} \frac{|E|^2}{\eta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} |E|^2 = \frac{1}{2} \frac{n}{\eta_0} |E|^2, \quad (2.23)$$

con  $n$  indice di rifrazione del mezzo (alla frequenza dell'onda) ed  $\eta_0$  impedenza caratteristica del vuoto. Dunque l'intensità dell'onda a frequenza  $2\omega$  ( $I_s$ ) all'ascissa  $L$  si trova, indicando con  $I_f$  l'intensità della fondamentale, mediante

$$I_s = 2\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0^3} \omega^2 \frac{d^2}{n_f^2 n_s} I_f^2 L^2 \frac{\sin^2(\Delta k L / 2)}{(\Delta k L / 2)^2}. \quad (2.24)$$

Per quantificare il fenomeno di conversione di lunghezza d'onda è utile definire il rendimento o efficienza di conversione

$$\eta_{SHG} = \frac{I_s}{I_f} = 2\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0^3} \omega^2 \frac{d^2}{n_f^2 n_s} L^2 \frac{\sin^2(\Delta k L / 2)}{(\Delta k L / 2)^2} I_f. \quad (2.25)$$

Figurano nella precedente gli indici di rifrazione a frequenza fondamentale ( $n_f$ ) e doppia ( $n_s$ ).

L'efficienza di conversione è proporzionale all'intensità dell'onda a fondamentale, a causa della dipendenza quadratica rispetto al campo della polarizzazione non lineare forzata da essa.

Il fattore

$$L^2 \frac{\sin^2(\Delta k L / 2)}{(\Delta k L / 2)^2} \quad (2.26)$$

è un termine di interferenza spaziale, dovuto alle differenti velocità di fase dell'onda a  $\omega$  ( $v_f$ ) e dell'onda a  $2\omega$  ( $v_s$ ). In effetti risulta:

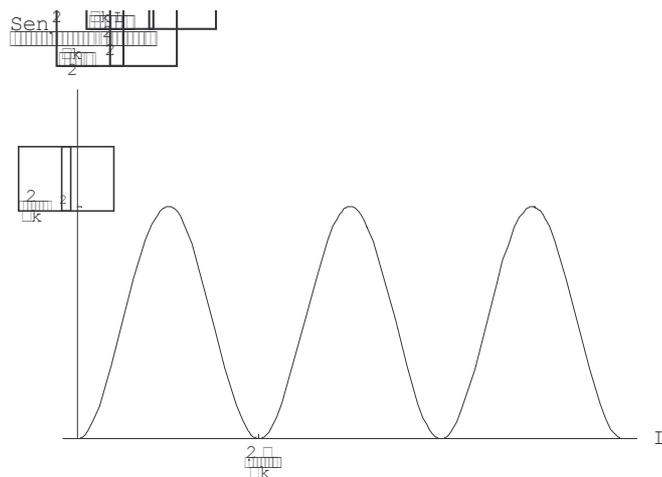
$$\Delta k = k_s - 2k_f = 2\omega\left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v_f}\right) \quad (2.27)$$

La sorgente per l'onda a seconda armonica è il campo di polarizzazione non lineare forzato dalla fondamentale; si tratta allora di una sorgente distribuita nello spazio. Le variazioni di fase di detta sorgente seguono quelle dell'onda a frequenza  $\omega$ , evolvendosi nello spazio con costante di fase  $2k_f$ . L'onda a frequenza doppia si propaga con velocità di fase diversa (costante di fase  $k_s$ ) e dunque i contributi al campo generato provenienti da diverse regioni del mezzo possono interferire fra loro in maniera costruttiva o distruttiva a seconda della reciproca relazione di fase nel punto generico sotto osservazione.

L'andamento del fattore di interferenza è riportato in figura 2.1; la distanza

$$l_c = \frac{\pi}{\Delta k} = \frac{\lambda_0}{4(n_s - n_f)} \quad (2.28)$$

è detta lunghezza di coerenza, ed è indicativa delle lunghezze di interazione utili per la generazione di seconda armonica in un cristallo. Il valore massimo del rendimento di conversione dipende dall'inverso di  $\Delta k^2$ , tendendo all'infinito col diminuire di questo, come deve essere data la crescita illimitata di  $I_s$ ; si ricorda però che si è pure trascurata la riconversione all'indietro da  $\omega$  a  $2\omega$ , importante quando il campo di seconda armonica diviene significativo rispetto al campo a frequenza fondamentale. Il risultato conseguito ha pertanto validità limitata ai casi di svuotamento trascurabile della fondamentale.



**Figura 2.1:** Andamento del fattore di interferenza con la distanza  $L$  di propagazione.

### 2.3. Sincronismo di fase (*phase matching*)

Soddisfare la condizione di sincronismo di fase (phase matching)

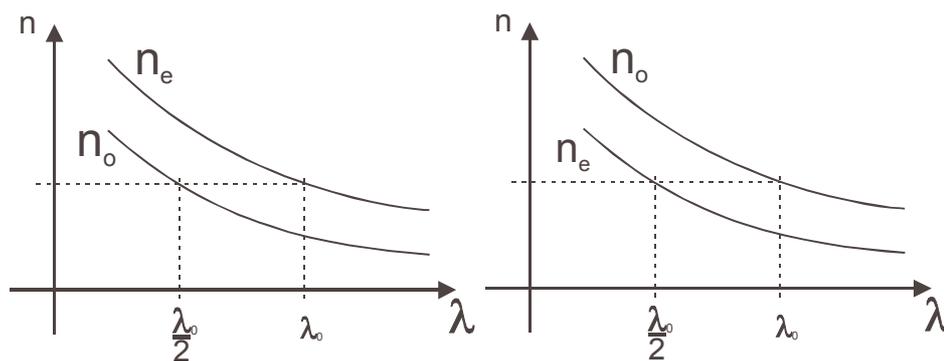
$$\Delta k = k_s - 2k_f = 0 \quad (2.29)$$

risulta dunque essenziale al fine di ottenere un elevato rendimento di generazione di seconda armonica.

La propagazione di onde piane in un materiale isotropo è affetta dalla dispersione cromatica, cioè la dipendenza della velocità di fase dalla frequenza del campo monocromatico; di conseguenza l'indice di rifrazione è funzione della lunghezza d'onda e pertanto risulta impossibile il verificarsi della condizione (2.29).

La condizione di sincronismo potrà essere soddisfatta invece in mezzi anisotropi.

La natura tensoriale del legame fra il campo forzante (2.9) e la polarizzazione non lineare a  $2\omega$  rende possibile il trasferimento di potenza fra la fondamentale polarizzata lungo una direzione e l'onda a frequenza doppia polarizzata lungo una direzione differente. Pertanto, se i campi si propagano ad esempio in un cristallo uniassico, si può pensare alla generazione di un'onda straordinaria a seconda armonica a partire da una fondamentale ordinaria o viceversa. Si ha così la possibilità di "compensare" la differenza di indice, cioè la differenza delle velocità di fase, normalmente sperimentata da due onde di frequenza diversa a causa della dispersione cromatica, mediante la birifrangenza del materiale. Se, per semplicità, la propagazione è in direzione normale all'asse ottico del cristallo, le due onde piane possibili si propagano con indici  $n_o$  ed  $n_e$ , i quali mostrano una dipendenza tipica da  $\lambda$  quale quella riportata in figura 2.2. Si mostra la possibilità dell'esistenza di una precisa lunghezza d'onda  $\lambda_0$  in corrispondenza della quale può aversi la coincidenza delle velocità di fase.



**Figura 2.2:** Phase-matching birifrangente.

A sinistra il caso di un cristallo uniassico positivo, a destra negativo.

Se la propagazione è in direzione generica, l'onda straordinaria si propaga con velocità dipendente dall'angolo fra la direzione di propagazione e l'asse ottico, ma resta possibile realizzare la condizione di sincronismo di fase per una ben precisa frequenza della fondamentale.

La duplicazione di frequenza di un'onda di prefissata pulsazione, sarà possibile scegliendo accuratamente l'angolo di propagazione e controllandolo fino a conseguire il phase matching fra l'onda e la sua seconda armonica. Si parla di *phase matching* critico.

Per esperienze di SHG occorre usare fasci laser. Nella propagazione in un cristallo birifrangente, il fenomeno di conversione è limitato sia dalla divergenza naturale dei due fasci, quello a fondamentale e quello convertito, sia dalla diversa direzione dei flussi di potenza, che porta alla separazione delle due onde dopo una certa distanza di propagazione (*walk off*), limitando la distanza di interazione e dunque l'efficacia del processo di conversione.

La separazione dei fasci non avviene nel caso particolare di propagazione in direzione ortogonale all'asse ottico, sebbene ciò riproponga il vincolo sulla pulsazione fondamentale; per superarlo, si può regolare la temperatura del cristallo.

Questo approccio riposa sulla differenza delle dipendenze degli indici rispetto alla temperatura

$$\frac{\partial n_o}{\partial T} \neq \frac{\partial n_e}{\partial T} \quad (2.30)$$

Al variare della temperatura, alterandosi in maniera differente le curve di dispersione degli indici straordinario ed ordinario, cambierà la pulsazione per la quale si ha la coincidenza delle velocità di fase.

Tale metodo è indicato come *phase matching* non critico, contrapposto al *phase matching* critico in cui si agisce sull'angolo del cristallo e si ha un'elevata sensibilità del *phase mismatch* rispetto all'angolo.

## 2.4. Generazione di seconda armonica in guida ottica

Nei precedenti paragrafi si è inteso richiamare gli elementi essenziali per la discussione del fenomeno della duplicazione di frequenza, facendo riferimento all'interazione fra campi monocromatici propagantisi sotto forma di onde piane, o di fasci, in mezzi di struttura omogenea.

La risposta non lineare di un materiale può influenzare la propagazione dei modi guidati in una guida dielettrica, dando origine ad una peculiare fenomenologia.

L'interazione è, per inciso, tipicamente limitata a distanze dell'ordine del centimetro da fenomeni di perdita di varia natura; sono inevitabili le perdite intrinseche del materiale e le perdite per diffusione (*scattering*) dalle disuniformità del materiale e dalle imperfezioni.

Ad intensità elevate corrispondono campi **E** ed **H** elevati, condizione primaria, come già indicato, per il realizzarsi di significativi effetti non lineari. La possibilità di raggiungere tale condizione con potenze dell'ordine delle decine o delle centinaia di mW consente l'impiego di sorgenti a semiconduttore con i vantaggi di elevata compattezza, facile integrabilità in sistemi ottici piccoli e robusti ed economicità rispetto a sorgenti laser convenzionali che ne conseguono.

Si estende così la varietà di funzioni che possono essere realizzate nei circuiti ottici integrati.

La duplicazione di frequenza, la miscelazione parametrica, l'oscillazione parametrica e l'elaborazione di segnali ottici sono tutti fenomeni dimostrati in guide ottiche non lineari.

In particolare la tecnologia del Niobio di Litio rende possibile oggi un elevato grado di controllo dei parametri caratteristici delle guide ottiche, consentendo l'ingegnerizzazione che esalti l'una o l'altra fra varie possibili interazioni non lineari per specifiche applicazioni [Stegeman, 1985].

### *Teoria perturbativa della duplicazione di frequenza in guide ottiche*

Si può ripercorrere lo studio compiuto riguardo alla duplicazione di frequenza in propagazione libera estendendolo al caso dell'ottica guidata, con l'intento di evidenziare analogie e peculiarità di questo particolare fenomeno.

Con riferimento ad una guida planare del tipo introdotto nel capitolo precedente, il modo a frequenza angolare  $\omega$  (fondamentale), in propagazione lungo  $z$ , può essere descritto mediante l'espressione:

$$E_f = A_f e_f(x) e^{-j\beta_f z}, \quad (2.31)$$

assumendo un sistema di riferimento con l'asse  $x$  ortogonale al piano della guida ( $y, z$ ) e propagazione lungo  $z$ . Il vettore modale  $e_f(x)$  esprime il profilo del campo, dipendente dal profilo d'indice della guida;  $A_f$  è l'ampiezza modale e la densità lineare di potenza trasportata dal modo risulta proporzionale ad  $|A_f|^2$ . La costante di propagazione del modo è  $\beta_f$ , che soddisfa la (1.9).

Non si specifica la polarizzazione potendosi adattare l'esposizione ai casi di modo a fondamentale TE o TM, e resta ammessa l'ipotesi di svuotamento trascurabile del campo a fondamentale, ammettendo costante l'ampiezza dell'onda a frequenza  $\omega$  in propagazione lungo  $z$ .

Il campo a fondamentale genera un contributo di polarizzazione non lineare alla pulsazione  $2\omega$  esprimibile come:

$$P^{(2\omega)} = \varepsilon_0 dA_f^2 e_f^2(x) e^{-j2\beta_f z} \quad (2.32)$$

in base alla (2.9). E' il termine perturbativo per le equazioni del campo a seconda armonica ( $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ ):

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j2\omega\mu_0 \mathbf{H}_s \quad (2.33a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j2\omega\varepsilon_0 n_s^2(x) \mathbf{E}_s + j2\omega \mathbf{P}^{(2\omega)} \quad (2.33b)$$

le quali si combinano per ottenere l'equazione scalare "perturbata" sulla generica componente del campo a frequenza doppia:

$$\nabla^2 E_s + (2\omega)^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_s^2(x) E_s = -4\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 dA_f^2 e_f^2(x) e^{-j2\beta_f z}. \quad (2.34)$$

Può cercarsi la soluzione della precedente come sovrapposizione dei possibili modi a  $2\omega$ , pesati con coefficienti dipendenti dalla ascissa di propagazione  $z$ . Si concentra l'attenzione sull'interazione con un singolo modo, di costante di propagazione  $\beta_s$  ( $=2k_0N_s$ ), esprimibile nella forma:

$$E_s = B_s(z)e_s(x)e^{-j\beta_s z} \quad (2.35)$$

in cui si introduce la dipendenza di  $B_s$  dalla coordinata di propagazione. Tale dipendenza naturalmente tiene conto del flusso di potenza dalla “forzante” a frequenza  $\omega$  verso il modo a  $2\omega$ . Il profilo modale è espresso da  $e_s(x)$ .

Basta sostituire l'espressione (2.35) nell'equazione (2.34) per descrivere l'evoluzione di  $B_s$  lungo  $z$ ; occorre considerare il soddisfacimento dell'equazione (1.6a) da parte di  $e_s(x)$ , ammettere anche in questo caso l'ipotesi di lente variazioni su distanze confrontabili con  $\lambda$  (si veda la 2.19)

$$\left| \frac{d^2 B_s}{dz^2} \right| \ll \left| -j2\beta_s \frac{dB_s}{dz} \right|, \quad (2.36)$$

giungendo infine alla

$$e_s(x) \frac{dB_s}{dz} = 2 \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{j\beta_s} d A_f^2 e_f^2(x) e^{-j(2\beta_f - \beta_s)z}. \quad (2.37)$$

L'equazione ottenuta presenta la dipendenza dalla variabile  $x$  delle grandezze coinvolte. Tale dipendenza deve essere eliminata invocando le proprietà delle autofunzioni modali (1.12); si moltiplicano i membri della (2.38) per  $e_s(x)$  e si integra su  $x$ , ottenendo

$$\frac{dB_s}{dz} = 2 \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{j\beta_s} d A_f^2 S e^{-j(2\beta_f - \beta_s)z}, \quad (2.38)$$

nella quale si è introdotto il fattore

$$S = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e_f^2(x) e_s(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e_s^2(x) dx} \quad (2.39)$$

detto integrale di sovrapposizione (o di *overlap*); l'integrale a denominatore vale 1 per la (1.12) e  $S$  è adimensionale.

Integrando l'equazione (2.38), come già fatto nel caso delle onde piane, tenendo conto dell'espressione della densità di potenza lineare trasportata dal generico modo

$$P = \frac{1}{2Z} \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^2(x) dx, \quad (2.40)$$

in cui si è introdotta l'impedenza modale

$$Z = \frac{\eta_0}{N}, \quad (2.41)$$

dove  $N$  è l'indice efficace del modo, si perviene all'espressione del rendimento di conversione dopo un tratto di lunghezza  $L$  di propagazione nella guida:

$$\begin{aligned} \eta_{\text{SHG}} &= \frac{P_s}{P_f} = \frac{2Z_f^2}{Z_s} \frac{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0}{N_s^2} d^2 \left[ L^2 \frac{\sin^2(\Delta\beta L/2)}{(\Delta\beta L/2)^2} \right] S^2 P_f = \\ &= 2 \frac{\sqrt{\mu_0^3 \epsilon_0} \omega^2}{N_s N_f^2} d^2 \left[ L^2 \frac{\sin^2(\Delta\beta L/2)}{(\Delta\beta L/2)^2} \right] S^2 P_f \end{aligned} \quad (2.42)$$

L'espressione è analoga a quella trovata nell'ipotesi di interazione fra onde piane. Si riconosce il fattore che tiene conto dell'interferenza spaziale, del quale si è già discusso; il phase-mismatch è in questo caso

$$\Delta\beta = \beta_s - 2\beta_f = 2k_0(N_s - N_f) \quad (2.43)$$

con riferimento alle costanti di fase dei modi guidati. Si evidenzia il ruolo svolto dagli indici efficaci, corrispondenti agli indici sperimentati dalle onde a fondamentale e a seconda armonica.

La presenza del fattore  $S$  (integrale di sovrapposizione), legato al profilo dei campi dei modi interagenti, è un elemento distintivo dell'interazione fra modi guidati. Si compendia in esso l'efficacia dell'interazione, legata alla sovrapposizione spaziale dei due modi, o, più esattamente, del campo forzato  $\mathbf{E}_s$  e del campo di polarizzazione forzante  $\mathbf{P}^{(2\omega)}$ , legato al quadrato di  $\mathbf{E}_f$ . Quanto più intensi sono i campi nella stessa regione della guida, tanto più significativo tende ad essere l'accoppiamento fra i due modi ( $f, s$ ) indotto dalla polarizzazione non lineare, fatta salva la possibilità di cancellazioni fra i contributi di segno opposto nell'integrale  $S$ , per le variazioni di segno del campo  $e_s(x)$ . Si può pensare l'integrale di overlap come una misura di quanto un modo "veda" l'altro. E' pure possibile assegnare le dimensioni fisiche opportune alle funzioni modali per consentire l'interpretazione di  $S^2$  come valore reciproco di una sezione efficace di interazione, attribuendo al prodotto  $P_f S^2$  il significato di densità di potenza efficace dell'interazione.

Riepilogando gli elementi chiave, il modo a frequenza fondamentale  $\omega$  induce, punto per punto nel mezzo, una componente di polarizzazione oscillante a  $2\omega$ . L'entità di

tale fenomeno è legata alla risposta quadratica del mezzo espressa tramite il tensore  $\chi^{(2)}$  ( $\mathbf{d}$ ), e dunque dipende dalle intrinseche proprietà fisiche del mezzo e dalla sua struttura.

Il campo di polarizzazione indotto agisce come sorgente del campo elettromagnetico a pulsazione  $2\omega$ . Nel generico punto del cristallo occorre allora considerare i contributi provenienti da tutti gli elementi della “sorgente distribuita” e ciò può dare luogo interferenza costruttiva o distruttiva a seconda delle reciproche relazioni di fase; i termini interferenziali nelle espressioni dei rendimenti di conversione tengono conto di tale fenomeno.

Si ha perfetta condizione di sovrapposizione costruttiva quando sono verificate le condizioni di sincronismo di fase (phase matching).

L'integrale di sovrapposizione (*overlap*) esprime il grado di sovrapposizione spaziale del campo generato e della sorgente, un ulteriore termine influente sul processo di conversione di frequenza.

Per quanto riguarda l'errore di sincronismo tra due modi guidati, esso è attribuibile a tre diversi contributi: la dispersione del materiale, la birifrangenza, la dispersione modale.

La dispersione del materiale influenza, attraverso le variazioni degli indici dei mezzi, la dipendenza degli indici efficaci dei modi dalla pulsazione. La birifrangenza del materiale fa sì che modi di diversa polarizzazione (TE o TM) si propaghino con diverse velocità di fase.

Il profilo d'indice della guida influisce sulla dipendenza dell'autovalore dalla pulsazione e contribuisce alla dipendenza degli indici efficaci dalla frequenza.

A questi contributi si aggiunge l'effetto delle variazioni della temperatura che, alterando gli indici del mezzo, influenzano anch'esse gli indici efficaci e, di conseguenza, il *phase-mismatch*.

